17/12/15

$\nu \in \mathbb{N}$, $T(\nu) = \{1, 2, \ldots, \nu\}$

<u>Πρόταση</u> (χωρίς απόδειξη)

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του $T(n)$ που να έχει την ίδια ισχύ με το $T(n)$

<u>Πρόταση</u> (χωρίς απόδειξη)

$A \subset T(n)$, $n > 1$. Τότε:

$(\exists m < n)\ A \simeq T(m)$

<u>Πόρισμα</u>

$m, n \in \mathbb{N}$. Τότε: $\quad T(m) \simeq T(n) \Longleftrightarrow m = n$

<u>απόδειξη</u>

($\Longleftarrow$) Έστω $m = n \Rightarrow T(m) = T(n) \Longrightarrow T(m) \simeq T(n)$

($\Longrightarrow$) Έστω $T(m) \simeq T(n)$ και $m \neq n$
Έστω $m < n \Rightarrow T(m) \subset T(n)$ <u>άτοπο</u>! (λόγω της πρώτης πρότασης)

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

A πεπερασμένο $\overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow}$ $A = \emptyset$ ή $(\exists n \in \mathbb{N})\ A \simeq T(n)$

<u>Πρόταση</u>

Αν A πεπερασμένο και $A \neq \emptyset$, τότε υπάρχει <u>ακριβώς</u> ένα $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T(k) \simeq A$

($k = \mathrm{card}A \Leftrightarrow A \simeq T(k)$, $A \neq \emptyset$) (Αν $A = \emptyset$, $\mathrm{card}A = 0$)

<u>απόδειξη</u>
Έστω $k, \lambda \in \mathbb{N}$, $k \neq \lambda$, με $T(k) \simeq A$ και $T(\lambda) \simeq A$. Τότε

$T(k) \simeq T(\lambda) \Rightarrow k = \lambda$

Πρόταση

Αν A πεπερασμένο σύνολο κ $B \subseteq A$, τότε και το B είναι πεπερασμένο και μάλιστα $\text{card}B \leq \text{card}A$. Ειδικότερα: $B \subset A \Rightarrow \text{card}B < \text{card}A$

απόδειξη

Αν $A = B$ ισχύει. Έτσι, αρκεί να υποθέσουμε ότι $B \subset A$

A πεπερασμένο, με $\text{card}A = \nu \geq 2$. Τότε $\underset{\text{αμφ.}}{\exists f} : A \xrightarrow{\text{επί}} T(\nu)$ $(A \simeq T(\nu))$

$$f(A) = T(\nu) \xRightarrow{B \subset A} f(B) \subset f(A) = T(\nu) \Rightarrow f(B) \simeq T(m),\ m < \nu \xRightarrow{f(B) \simeq B} B \simeq T(m),\ m<\nu$$

$\Rightarrow \text{card}B < \text{card}A$

Πρόταση

Αν A, B πεπερασμένα σύνολα, τότε:

(i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B$

(ii) $\text{card}(A - B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$

(iii) $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$

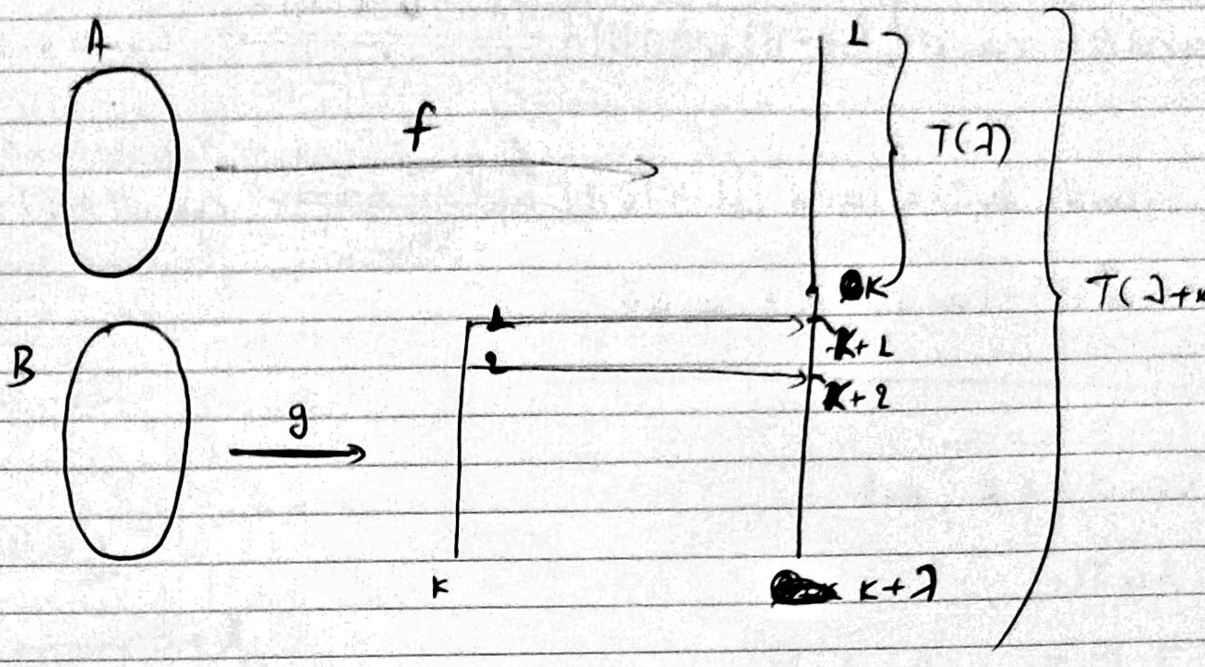
(iv) $\text{card}(A \times B) = (\text{card}A)(\text{card}B)$

απόδειξη

(i) Έστω $A \neq \emptyset \neq B$, $\text{card}A = \kappa$, $\text{card}B = \lambda$ [redacted]

$\Rightarrow \underset{\text{αμφ}}{\exists f} : A \xrightarrow{\text{επί}} T(\kappa)$

$\Rightarrow \underset{\text{αμφ.}}{\exists g} : B \xrightarrow{\text{επί}} T(\lambda)$



Άρα $\exists\, \phi : T(\kappa) \to \{\lambda+1, \dots, \lambda+\kappa\}$

$\phi(x) = \lambda + x$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ (\phi \circ g)(x), & x \in B \end{cases}$$

$h : A \cup B \xrightarrow{\text{επί}} T(\lambda+\kappa)$
αμφ

Άρα $card(A \cup B) = \kappa + \lambda = card\, A + card\, B$

(ii) $A = (A-B) \cup (A \cap B)$ άσκηση

$A \cup B = (A-B) \cup B$

Τα θεωρείς δεδομένα για την απόδειξη αλλά να τα αποδείξεις

$$\text{card}A = \text{card}\left[(A-B)\cup(A\cap B)\right] \xrightarrow[(i)]{(A-B)\cup(A\cap B)=\emptyset} \text{card}(A-B) + \text{card}(A\cap B)$$

iii) $\text{card}(A\cup B) = \text{card}\left[(A-B)\cup B\right] \xrightarrow[(i)]{(A-B)\cup B=\emptyset} \text{card}(A-B) + \text{card}B \xrightarrow{(ii)}$

$\text{card}A - \text{card}(A\cap B) + \text{card}B$

<u>Παρατήρηση</u>

$\text{card}A = \kappa \ , \ \kappa\in\mathbb{N}$

$A \simeq T(\kappa)$

$\exists\ f: T(\kappa) \xrightarrow{\text{επί}} A$

$A = f(T(\kappa)) = f(\{1,2,\dots,\kappa\}) = \{f(1), f(2), \dots, f(\kappa)\} = \{x_1, x_2, \dots, x_\kappa\}$, $x_i \neq x_j$ όταν $i\neq j$

---

iv) Έστω $A \neq \emptyset \neq B$

$\text{card}A = \kappa\in\mathbb{N}$, $\text{card}B = \lambda\in\mathbb{N}$

$A = \{x_1, x_2, \dots, x_\kappa\}$

$B = \{y_1, y_2, \dots, y_\lambda\}$

$A\times B = \{(x_1,y_1), (x_1,y_2), \dots, (x_1,y_\lambda), \longrightarrow X_1$

$(x_2,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_2,y_\lambda), \longrightarrow X_2$

$- - -$

$- - -$

$(x_\kappa,y_1), (x_\kappa,y_2), \dots, (x_\kappa,y_\lambda)\} \longrightarrow X_\kappa$

Άρα: $A \times B = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$

$card(A \times B) = card\, X_1 + card\, X_2 + \ldots + card\, X_k$

$X_1 = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_1, y_\lambda)\}$.

$f: X_1 \xrightarrow{\text{επί}} B$
αμφ.

$f((x_1, y_r)) = y_r$

$card X_1 = card B = \lambda$.

Άρα: $card(A \times B) = card X_1 + card X_2 + \ldots + card X_k =$

$= \underbrace{\lambda + \lambda + \ldots + \lambda}_{k} = k\lambda = (card A)(card B)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

A απέραντο $\Longleftrightarrow$ A δεν είναι πεπερασμένο

Πρόταση

Το $\mathbb{N}$ είναι απέραντο σύνολο

απόδειξη

Άρα $\exists f: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{επί}} T(k)$
αμφ.

$T(k+1) \subset \mathbb{N} \Rightarrow f(T(k+1)) \subset f(\mathbb{N}) = T(k)$

$\downarrow$

$k+1 \leq k$ άτοπο!!

Πρόταση

Κάθε υπερσύνολο απέραντου είναι απέραντο

απόδειξη

Έστω A απέραντο και $B \supseteq A$ Θ.δ.ο απέραντο

Έστω ότι B πεπερασμένο. Τότε το A ως υποσύνολο του B είναι πεπερασμένο

Άτοπο!!

Πρόταση

Αν A απέραντο και B πεπερασμένο, τότε $A-B$ απέραντο

απόδειξη

$\underset{\text{απερ.}}{\underline{\underline{A}}} = (A-B) \cup (A \cap B)$ πεπερ.

B πεπερ. $\xRightarrow{A \cap B \subseteq B}$ $A \cap B$ πεπερ. άρα

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν A απέραντο, τότε υπάρχει $B \subseteq A : B \simeq \mathbb{N}$ και αντίστροφα

απόδειξη

Έστω υπάρχει $B \subseteq A$, $B \simeq \mathbb{N}$. Θ.δ.ο A απέραντο

$B \simeq \mathbb{N} \xRightarrow{\mathbb{N} \text{ απερ.}} B$ απέραντο $\xRightarrow{B \subseteq A}$ A απέραντο

Αντίστροφα, έστω A απέραντο $\Longrightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x_1 \in A \Rightarrow A - \{x_1\}$ απέραντο

$\Rightarrow A - \{x_1\} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x_2)\, x_2 \in A - \{x_1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A - \{x_1, x_2\}$ απέραντο ...

$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots\} \subseteq A$

$$\operatorname{card}(A \cup B \cup \Gamma) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B + \operatorname{card} \Gamma - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap \Gamma) - \operatorname{card}(B \cap \Gamma) + \operatorname{card}(A \cap B \cap \Gamma)$$

$$\operatorname{card}(X \cup Y) = \operatorname{card} X + \operatorname{card} Y - \operatorname{card}(X \cap Y)$$

απόδειξη

$$\operatorname{card}(A \cup B \cup \Gamma) = \operatorname{card}[(A \cup B) \cup \Gamma] = \operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card} \Gamma - \operatorname{card}[(A \cup B) \cap \Gamma]$$

$$= \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card} \Gamma - \operatorname{card}[(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)]$$

$$= \text{———} \;\text{"}\; \text{———} - \operatorname{card}(A \cap \Gamma) - \operatorname{card}(B \cap \Gamma) + \operatorname{card}[(A \cap \Gamma) \cap (B \cap \Gamma)] =$$

$$= \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card} \Gamma - \operatorname{card}(A \cap \Gamma) - \operatorname{card}(B \cap \Gamma) + \operatorname{card}(A \cap B \cap \Gamma)$$